Générateurs de $O(E)$ et de $SO(E)$ — Perrin, p. 143

Théorème : $\forall n = \dim E \geq 2$, $\forall u \in O(E)$, u est produit d'au plus n réflexions.

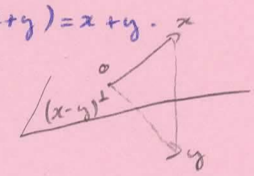
Soit $u \in O(E)$. Posons $F_u = \{x \in E \, ; \, u(x) = x\}$ et $p_u = n - \dim F_u$.
Montrons par récurrence sur p_u que u est produit d'au plus p_u réflexions.

$p_u = 0$: Alors $F_u = E$ i.e. $u = id$ qui est produit de 0 réflexions.

Hérédité : Supposons la propriété vraie $\forall \tau \in O(q)$ tel que $p_\tau < p_u$.
Soit $x \in F_u^\perp \setminus \{0\}$ et $y = u(x)$. Alors $y \neq x$ car $x \notin F_u$ et $y \in F_u^\perp$ car :

$$\forall z \in F_u, \ \langle y, z \rangle = \langle u(x), u(z) \rangle = \langle x, z \rangle = 0$$

Puisque u est une isométrie, $\|y\| = \|u(x)\| = \|x\|$. Donc $\langle x-y, x+y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$ i.e. $x+y \perp x-y$.
Soit τ la réflexion d'hyperplan $(x-y)^\perp$. Alors $\tau(x-y) = y-x$ et $\tau(x+y) = x+y$.
D'où $2\tau(y) = \tau(x+y) - \tau(x-y) = 2x$ i.e. $\tau(y) = x$.



De plus, $\underbrace{x-y}_{\in F_u^\perp} \in F_u^\perp$ donc $F_u \subset (x-y)^\perp$. D'où $\tau|_{F_u} = id$.
Ainsi, $F_u \subset F_{\tau \circ u}$ et l'inclusion est stricte car $x \in F_{\tau\circ u}$ et $x \notin F_u$.
Donc $p_{\tau \circ u} < p_u$ et par H.R., $\exists \tau_1, \dots, \tau_r$ des réflexions telles que $r \leq p_{\tau\circ u}$ et $\tau \circ u = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$.
D'où $u = \tau \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$ et $r + 1 \leq p_u$.
car $\tau^{-1} = \tau$

Remarque : p_u est le nombre minimal car si $u = s_{H_1} \circ \dots \circ s_{H_k}$, alors $H_1 \cap \dots \cap H_k \subset F_u$
et $\dim F_u \geq \dim(H_1 \cap \dots \cap H_k) = n - rg(\ell_1, \dots, \ell_k) \geq n - k$ d'où $k \geq n - \dim F_u$, où $H_i = \mathrm{Ker}(\ell_i)$.

Théorème : $\forall n = \dim E \geq 3$, $\forall u \in SO(E)$, u est produit d'au plus n renversements.

Soit $u \in SO(E) \subset O(E)$. Par le théorème précédent, $\exists \tau_1, \dots, \tau_{2p}$ des réflexions de E avec $2p \leq n$ et $u = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{2p-1} \tau_{2p}$.
$\det(u) = 1$ et $\det(\tau_i) = -1$
Posons $v = \tau_1 \tau_2$. Soit H_1, H_2 des hyperplans tels que $\tau_1 = s_{H_1}$ et $\tau_2 = s_{H_2}$.
Soit V un sous-espace de dimension $n-3$ de $H_1 \cap H_2$. Alors $v|_V = id$ et donc $v(V^\perp) \subset V^\perp$.
$\forall x \in V^\perp, \forall y \in V, \ \langle v(x), \underbrace{y}_{= v(y)} \rangle = \langle x, y \rangle = 0$
Or, $\dim(V^\perp) = 3$ donc $\sigma_i := -\tau_i|_{V^\perp}$ est un renversement. En effet, soit $\mathcal{B}$ une base de $V^\perp$,
alors $\tau_i|_{V^\perp} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & -1 \end{pmatrix}$ donc $\sigma_i = \begin{pmatrix} -1 & & (0) \\ & -1 & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$. Donc $v|_{V^\perp} = (-\sigma_1)(-\sigma_2) = \sigma_1 \sigma_2$ où σ_i est un renversement de $V^\perp$. On prolonge σ_i par l'identité sur V, qui est un renversement de E. D'où le résultat.